Mathematik 1 - Übungsblatt 10

Aufgabe 1

Gegeben: $y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-3 \cdot \sqrt[3]{x}}$. Bestimmen Sie die Ableitung.

Aufgabe 2

Ableitungen zu: $y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-3x}$, $y = e^{4 \cdot \sqrt{x}}$, $y = e^{\frac{x^2}{1-x}}$

(Anwendung von Summenregel , Kettenregel und Quotientenregel)

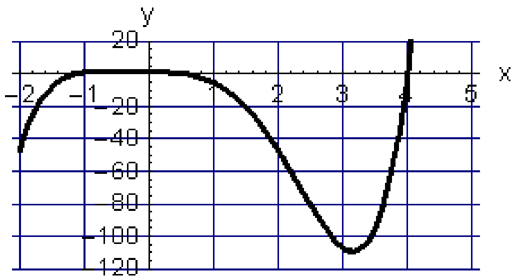
Aufgabe 3

Maxima, Minima, Wendepunkte, Sattelpunkte von

$$y = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 1$$

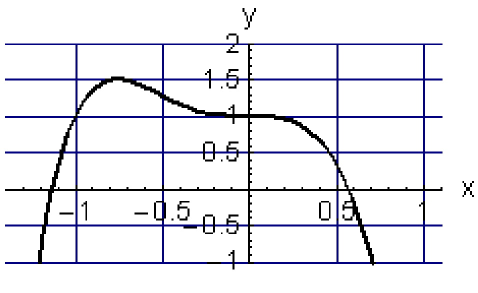
Zur Lösung:

Für einen ersten Überblick kann man sich die Funktion z. B. mit **Scilab** darstellen lassen:



Sie weist die 3 reellen Nullstellen (auch mit **Scilab**) $x_1 = -1.13$, $x_2 = 0.57$, $x_3 = 3.99$ auf (die restlichen beiden sind konjugiert komplexe Zahlen).

Bei $x_{1,2} = 0$ befindet sich ein Sattelpunkt.Der „gezoomte" Graph stellt dies dar:



Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Ableitungen $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ zu folgenden Funktionen

$$f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

$$f(x) = (\tan(3x - \pi))^2$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{-a \cdot x^2}$$

und die Ableitungen $\dot{u}(t) = \frac{du(t)}{dt}$ zu

$$u(t) = \hat{u} \cdot \left(\frac{e^{i \cdot (\omega t + \beta)} + e^{-i \cdot (\omega t + \beta)}}{2} \right)$$, i, $\hat{u}$, ω, β sind Konstanten.

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-(a \cdot t)} \cdot \cos(\omega t - \gamma)$$, $U_{0,}$ ω, γ, a sind Konstanten.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion y = y(x).

a) Leiten Sie die Funktion $g(y) = \log_e(y)$ nach x ab.

b) Leiten Sie die Funktion $y = \sqrt{x^3 \cdot e^{4x} \sin(x)}$ nach x auf zweierlei Weise ab:

- Direkt unter Anwendung der Ableitungsregeln
- Nach Logarithmieren der Funktion $g(x) = \log_e(y)$ als Zwischenschritt. Hinweis: Hier erhalten Sie wie in a) einen Ausdruck, der die gesuchte Ableitung y'(x) enthält und nur noch entsprechend umgestellt werden muss.

Aufgabe 6

Leiten Sie die Funktion $h = (2t + 1)^{3t}$ nach t auf zweierlei Weise ab:

- Direkt unter Anwendung der Ableitungsregeln
- Nach Logarithmieren der Funktion $g(t) = \ln(h)$ als Zwischenschritt.

Frage: Welche Wege erscheinen Ihnen bei den Aufgaben 5 und 6 einfacher?

Aufgabe 7

Gegeben ist die Zeitfunktion x = x(t). Sie ist mit ihrer zeitlichen Ableitung $\dot{x} = \dot{x}(t)$ über die Gleichung

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = 0$$

verknüpft. T_1 ist eine Konstante. Ermittelt werden soll ein Funktionsausdruck x(t), der die Gleichung für alle $t \geq 0$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass sich der Ansatz $x(t) = e^{k \cdot t}$ mit der zunächst unbekannten Konstanten k grundsätzlich hierfür eignet.

Soweit $e^{k \cdot t} \neq 0$ ist, kann die Gleichung hierdurch dividiert werden.

b) Zeigen Sie, dass dies für alle $t \geq 0$ erfüllt ist und führen Sie die Division aus.

c) Welche Bedingung ergibt sich für k?

d) Geben Sie nun die Funktion x(t) an.

Congratulations: Sie haben Ihre vermutlich erste Differenzialgleichung gelöst!

Aufgabe 8 (Extremwertbestimmung)

Gegeben ist eine Ersatzstromquelle mit dem eingeprägten Strom I_0 und dem ohmschen Innenwiderstand R_i . An diese Quelle soll ein ohmscher Verbraucher R_v angeschlossen und so dimensioniert werden, dass er die maximale elektrische Leistung $P_v = P_v(R_v) = P_{vmax}$ entnimmt. Nach den Gesetzen der Elektrotechnik berechnet sich die Leistung aus

$$P_v = P_v(R_v) = I_v^2 \cdot R_v = I_0^2 \cdot R_i^2 \cdot \frac{R_v}{(R_i + R_v)^2}$$

a) Welche Leistungen ergeben sich für $R_v = 0$ (Kurzschluss) und $R_v \to \infty$ (Leerlauf)?

b) Skizzieren Sie grob den Verlauf $P_v = P_v(R_v)$.

c) Da die Leistung stetig verläuft und nicht negativ werden kann, muss zwischen beiden Werten von R_v ein Maximum von P_v liegen. Dieses ist durch eine horizontale Tangente an $P_v = P_v(R_v)$ gekennzeichnet. Ermitteln Sie Ort und Größe dieses Maximums allgemein und für $I_0 = 10[A],\ R_i = 20[\Omega]$.

Kontrollfrage: Was folgt aus der Aussage „horizontale Tangente“ für den Wert der Ableitung?

Aufgabe 9 (l'Hospital-Regel)

Beseitigen Sie die Unbestimmtheitsstellen

a) bei x= 0 in $y = \frac{\sin(x)}{x}$.

b) bei x=0 in $y = \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin(x))}$

c) bei $x = \frac{\pi}{2}$ in $y = (\pi - 2x) \cdot \tan(x)$

d) bei x=1 in $y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$

e) bei x=0 in $y = x^x$

Aufgabe 10 (Reihenentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $y = \sin(x)$ bis zur 7-ten Potenz in eine Taylorreihe um die Punkte

a) $x = 0$

b) $x = \frac{\pi}{3}$

Aufgabe 11 (Reihenentwicklung)

Entwickeln Sie die Funktion $y = \arctan(x)$ bis zur 5-ten Potenz in eine Taylorreihe um die Punkte

a) $x = 0$

b) $x = \frac{\pi}{4}$