Mathematik 1 - Übungsblatt 7
Lösungshinweise
Tipp: Verwenden Sie zur Kontrolle **Scilab**, wo immer es möglich ist.

Aufgabe 1 (Definitionsformel für Determinanten)

Determinanten quadratischer Matrizen sind skalare Größen (=einfache Zahlen im Gegensatz zu vektoriellen Größen), die sich aus einer n x n-Matrix

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

über den Ausdruck

$$\det(A) = \sum_{\text{alle Permutationen von } \alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega} (-1)^k \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot a_{3\gamma} \cdot \ \dots\ \cdot a_{n\omega}$$

mit $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, …. , $\omega=n$

$k \rightarrow$ Anzahl der Inversionen (= Vertauschungen gegenüber der Ausgangsreihenfolge

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$)

berechnen lassen.

a) Wie viele Permutationen der Zweit-Indices $\alpha\ \beta\ \gamma\ \dots\ \omega$ gibt es bei $\omega=n$? $\rightarrow$ n!

b) Bestätigen Sie über die oben angegebene allgemeine Definition die Merkregel für Determinanten von 2x2-Matrizen

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad .$$

Es gibt für die beiden Zweit-Indices α und β die Permutationen

Nr	Permutation	k = Anzahl der Inversionen
1	$\alpha\beta$	0
2	$\beta\alpha$	1

Damit ist $\det(A) = (-1)^0 \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} + (-1)^1 \cdot a_{1\beta} \cdot a_2\alpha = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

c) Bestätigen Sie die **Sarrus-Regel** für Determinanten von 3x3-Matrizen.

Hier gibt es 3 Zweit- Indices α , β und γ sowie 3!=6 Permutationen :

Nr	Permutation	k= Anzahl der Inversionen
1	$\alpha\,\beta\,\gamma$	0
2	$\alpha\,\gamma\,\beta$	1
3	$\beta\,\alpha\,\gamma$	1
4	$\beta\,\gamma\,\alpha$	2
5	$\gamma\,\alpha\,\beta$	2
6	$\gamma\,\beta\,\alpha$	3

Damit ist

$$\det(A) = (-1)^0 \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\beta} \cdot a_{3\gamma} + (-1)^1 \cdot a_{1\alpha} \cdot a_{2\gamma} \cdot a_{3\beta} + (-1)^1 \cdot a_{1\beta} \cdot a_{2\alpha} \cdot a_{3\gamma} + (-1)^2 \cdot a_{1\beta} \cdot a_{2\gamma} \cdot a_{3\alpha} + \ldots$$

oder mit $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \quad .$$

Aufgabe 2 (Determinanten)

a) Wie viele Permutationen der Zweit-Indices gibt es bei einer 4 x 4-Matrix A?

Für die 4 Zweit-Indices α , β , γ und δ (= griechisch „delta") gibt es 4!=24 Permutationen .

b) Stellen Sie zur Determinanten-Berechnung für A irgendwelche 6 Permutationen der Zweit- Indices auf. **Tipp:** Nicht zwingend, aber wegen der Systematik übersichtlich wird es, wenn man zuerst die beiden letzten Zweit-Indices vertauscht, dann den zweiten und dritten usw.

Nr	Permutation	k= Anzahl der Inversionen
1	$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$	0
2	$\alpha\,\beta\,\delta\,\gamma$	1
3	$\alpha\,\gamma\,\beta\,\delta$	1
4	$\alpha\,\gamma\,\delta\,\beta$	2
5	$\gamma\,\alpha\,\beta\,\delta$	2
6	$\gamma\,\alpha\,\delta\,\beta$	3

c) Bestimmen Sie die Inversionen k zu jeder Permutation von b). → siehe Tabelle oben

d) Bestimmen Sie zu den Permutationen von b) die vorzeichenrichtigen Summenterme in det(A).

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} \cdot a_{43} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{44}$$
$$+ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \cdot a_{42} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \cdot a_{42} \quad .....$$

Aufgabe 3 (Unterdeterminanten)

Die Unterdeterminante zum Element a_{ij} wird als Adjunkte A_{iJ} oder algebraisches Komplement bezeichnet. Wenn eine n x n_Matrix auch Nullelemente $a_{ij}=0$ besitzt, liefern die zugehörigen Terme in der Determinanten-Formel keine Beiträge.

a) Untersuchen Sie für die Matrix

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(A) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente. (Selbst lösen)

b) Untersuchen Sie für die Matrix

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(B) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente. (Selbst lösen)

c) Untersuchen Sie für die Matrix

$$C=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

welche Summenterme in der Determinante det(C) herausfallen und markieren Sie die entsprechenden Matrixelemente. (Selbst lösen)

d) Was fällt Ihnen bei a), b) und c) zu den Positionen der markierten Elemente auf? **Hinweis:** Die markierten Elemente lassen sich einer Struktur zuordnen, die man als Unter-Matrizen der jeweiligen 0-Elemente bezeichnet.

Aufgabe 4 (Vereinfachung der Determinanten-Berechung durch Erzeugen von Nullelementen)

Gegeben ist die Matrix

$$P=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie det(P). → -51

b) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus <u>P</u> die Matrix <u>Q</u> , deren mittleres Element „0“ ist.

$$Q=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ \frac{20}{3} & 0 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie det(Q). → -51

d) Erzeugen Sie durch elementare Operationen aus P die Matrix R , deren linkes unteres Element „0“ ist.

$$R=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie det(R). → -51

f) Erzeugen Sie aus P eine rechte obere Dreiecksmatrix S und bestimmen Sie det(S).

$$S=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{51}{20} \end{bmatrix}, \text{ det (S) = -51}$$

g) Was fällt Ihnen bei den Determinanten auf? → Die Determinante einer Matrix ändert ihren Wert bei elementaren Operationen nicht.

h) Wie wirken sich die „0“-Elemente in der Sarrus-Regel aus? → Es fallen in der Summe zur Determinanten-Berechnung alle Terme weg, bei denen das „0“-Element vorkommt.

Aufgabe 5 (Matrix-Addition)

Gegeben sind

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Bilden Sie die Summen $C = A+B$ und $D = B+A$. (Selbst lösen)

b) Weisen die Ergebnisse von a) darauf hin, dass für die Matrizen-Addition das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Summanden) gilt? → Ja

Aufgabe 6 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $C = A \cdot B$.

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & -8 & 19 \\ 9 & -3 & 5 \\ -7 & -5 & 14 \end{bmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Produkt-Matrix $D = B \cdot A$.

$$D = B \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & -12 & 9 \\ 11 & 10 & -5 \\ -10 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

c) Erklären Sie die unterschiedlichen Ergebnisse zu a) und b). → Die Elemente der Produkt-- Matrizen werden aus unterschiedlichen Zeilen-Spalten-Kombinationen gebildet.

d) Gilt für die Matrix-Multiplikation das Kommutativgesetz (=Vertauschbarkeit der Faktoren)? → Nein

Aufgabe 7 (Matrix-Multiplikation)

Gegeben sind ein Spalten- und ein Zeilenvektor

$$a = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

a) Geben Sie die Dimensionen (Zeilenzahl x Spaltenzahl) von a und b an, wenn man sie als Matrizen interpretieren würde. → a → 1 x 3, b → 3 x 1

b) Bilden Sie das Produkt $C = b \cdot a$ **Hinweis:** Es gilt immer „Zeile x Spalte". Aus wie viel Elementen besteht dann z. B. die erste Zeile von b und die erste Spalte von a?

$$C = b \cdot a = \begin{bmatrix} 12 & -3 & 15 \\ 8 & -2 & 10 \\ -4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie det(C). → 0

d) Berechnen Sie den Rang von C. → 1

Aufgabe 8 (Transponierte Matrizen)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} .$$

a) Bilden Sie die Transponierte A^T.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie $B = A \cdot A^T$.

$$B = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ -2 & 14 & -8 \\ 3 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

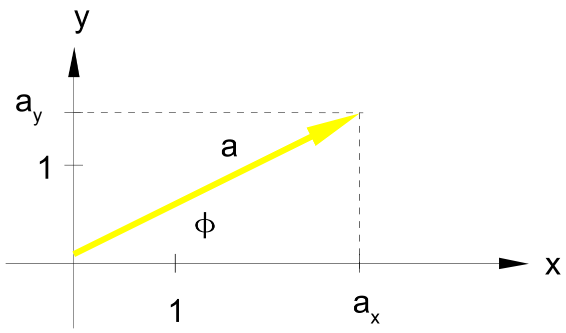
c) Was fällt Ihnen an der Struktur von B auf? → Symmetrie der Elemente zur Hauptdiagonalen, B ist eine symmetrische Matrix.

Aufgabe 9 (Vektoren)

Gegeben ist der zweidimensionale Spaltenvektor

$$a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \text{ mit den Elementen } \quad a_x = 3 \quad , \quad a_y = 2 \quad .$$

Man kann diesen abstrakten Vektor als gerichtete Größe in einem x-y-Koordinatensystem darstellen, wie es für viele physikalische Größen (Kräfte, Drehmomente, Temperaturgefälle, Geschwindigkeiten) üblich ist.



a) Nennen Sie die 4 Eigenschaften, mit denen ein physikalischer Vektor vollständig beschrieben ist.

- Länge (= Euklidische Norm, nicht korrekt auch als „Betrag“ bezeichnet)
- Richtung (Winkel der Richtungslinie zu einer Bezugslinie, z. B. positive x-Achse eines rechtwinkligen x-y-Koordinatensystems)
- Richtungssinn („wohin zeigt der Pfeil?“)
- Anfang (beliebig, aber oft im Ursprung des Bezugs-Koordinatensystems)

b) Bestimmen Sie die Länge $\|a\|$ (=Euklidische Norm) des Vektors.

$$\|a\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{13} = 3.61$$

c) Bestimmen Sie den Winkel ϕ (= griechisch „phi“) seiner Richtungslinie zur positiven x-Achse.

$$\phi = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = 33.7\,°$$

Aufgabe 10 (Umrechnen der Vektor-Bestimmungselemente)

Gegeben ist ein Vektor <u>b</u> der Länge $\|b\| = 5$. Seine Richtungslinie bildet mit der positiven x-Achse eines rechtwinkligen x-y-Koordinatensystems einen Winkel von 130°.

a) Bestimmen Sie die beiden Vektorelemente (=Koordinaten) b_x , b_y.

$$b_x = \|b\| \cdot \cos(130\,°) = -3.2 \qquad b_y = \|b\| \cdot \sin(130\,°) = 3.8$$

b) Skizzieren Sie b im Koordinatensystem. → Selbst machen

Aufgabe 11 (Verändern eines Vektors durch Multiplikation mit einer quadratischen Matrix)

Gegeben ist der Spaltenvektor

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ und die Matrix } M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \text{ mit } \alpha = 80\,° .$$

a) Bestimmen Sie die Norm $\|a\|$ und den Winkel ϕ zur positiven x-Achse.

$$\|a\| = 5.0 \quad , \quad \phi = 53.1\,°$$

b) Bestimmen Sie den Vektor $t = M \cdot a$.

$$t = \begin{bmatrix} -3.42 \\ 3.65 \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Norm $\|t\|$ und den Winkel θ (griechisch „teta“) zur positiven x-Achse.

$\|t\| = 5.0$, $\theta = 133.1\,°$ (Korrektur erforderlich?)

d) Welchen Winkel bilden die beiden Vektoren r und t? Vergleichen Sie diesen mit α .

$$\theta - \phi = 80\,°$$

e) Welche Wirkung hat die Multiplikation mit M auf die Norm und den Winkel von t?

Drehung um $\alpha = 80\,°$ ohne die Norm zu verändern (Wichtig bei Drehung des Koordinatensystems, z. B. in der technischen Mechanik)

f) Bestimmen Sie det(M). → 1