Mathematik II - Übungsblatt 08

Aufgabe 1

Ein räumliches Vektorfeld $E=[E_x,\ E_y,\ E_z]$ ist mit den Komponentenfunktionen

$E=[x\cdot z, 2\cdot x\cdot y^2, z^2]$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Divergenz

b) Geben Sie die Divergenz in den Punkten $P_1=[1,-2,2]$ und $P_1=[1,-2,2]$ an. Welcher Punkt ist eine Senke, welcher eine Quelle?

c) An welchen Punkten ist das Feld quellenfrei (div E =0)?

Aufgabe 2

Ein Skalarfeld V = V(x,y,z) wird durch die Funktion $V=x^2-2y+z\cdot x$ beschrieben.

a) Bestimmen Sie das zugeordnete Vektorfeld $E=-\operatorname{grad} V=[E_x,\ E_y,\ E_z]$

b) Geben Sie die Divergenz von E allgemein und im Punkt P(1,-1,3) an. Wird E im Punkt P durch eine Quelle vergrößert oder durch eine Senke vermindert?

c) Bestimmen Sie die Punktmenge, in der E quellenfrei ist?

d) Ist E wirbelfrei (rot E =0)?

Aufgabe 3

Die Bewegung der Massenpunkte auf einer starren, in der x-y-Ebene mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe kann als Vektorfeld F = F(x,y,z) dargestellt werden. Bestimmen Sie rot(F).

Aufgabe 4

a) Stellen Sie das Gradientenfeld F = grad V formal mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ dar.

b) Stellen Sie die Divergenz von F formal

- mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ ,
- mit Hilfe des Laplace-Operators Δ dar.

Aufgabe 5

Ein räumliches Vektorfeld E ist in rechtwinkligen (=kartesischen) x-y-z-Koordinaten als

$$E=[E_x,\ E_y,\ E_z]=\left[-y+\frac{x\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad x+\frac{y\cdot z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ x+y\right]$$

gegeben. Bestimmen Sie $R_{ZK} = \mathrm{rot}_{ZK} E$ in Zylinderkoordinaten.

Hinweise: In ZK ist die formale Darstellung von E

$$E = [E_\rho,\ E_\phi,\ E_z]$$

Zunächst x, y, z in E in ZK umformen, dann $R_{ZK} = \mathrm{rot}_{ZK} E$ ermitteln.

Aufgabe 6

Eine verfahrenstechnische Anlage enthält zwei vertikal angeordnete zylindrische Gefäße für die Pufferung einer Flüssigkeit. Beide Gefäße haben auf der Unterseite eine Abflussöffnung. Das obere Gefäß wird durch einen einstellbaren Zulauf u gespeist, der Flüssigkeitsstrom aus dem Abfluss läuft in das untere Gefäß.

Es sind folgende Bezeichnungen definiert:

u=u(t):	Zulauf
$x_1 = x_1(t)$:	Pegel im oberen Gefäß vom unteren Rand des Abflusses gemessen
$h_1 = h_1(t)$:	Pegel vom unteren Rand des oberen Gefäßes gemessen
$h_{10} = \text{const.}$:	Abstand unterer Rand des Abflusse zu unterem Gefäßrand
k_1 :	Konstante, die von der Geometrie des oberen Gefäßes abhängt
$x_2 = x_2(t)$:	Pegel im unteren Gefäß vom unteren Rand des Abflusses gemessen
$h_2 = h_2(t)$:	Pegel vom unteren Rand des unteren Gefäßes gemessen
$h_{20} = \text{const.}$:	Abstand unterer Rand des Abflusses zu unterem Gefäßrand
k_2 :	Konstante, die von der Geometrie des unteren Gefäßes abhängt
$y(t) = h_2 = x_2 - h_{20}$:	

Für die Pegelstände in den beiden Gefäßen gelten die DGLs

$$\dot{x}_1 = -k_1 \cdot \sqrt{x_1} + u$$

$$\dot{x}_2 = k_1 \cdot \sqrt{x_1} - k_2 \cdot \sqrt{x_2}$$

Sie sind nichtlinear, da x_1 und x_2 unter der Wurzel auftreten (Grund ist der Zusammenhang zwischen dem hydrostatischen Druck der Flüssigkeit - proportional zum Pegel x - und des Abflussstromes).

a) Stellen Sie die DGL auf, die den Zusammenhang zwischen dem Pegel y im unteren Gefäß und dem Zulaufstrom u beschreibt.

b) Linearisieren Sie die DGL für einen Arbeitspunkt $x_{10,}\ x_{20,}\ u_0$.

c) Geben Sie die Lösung an.