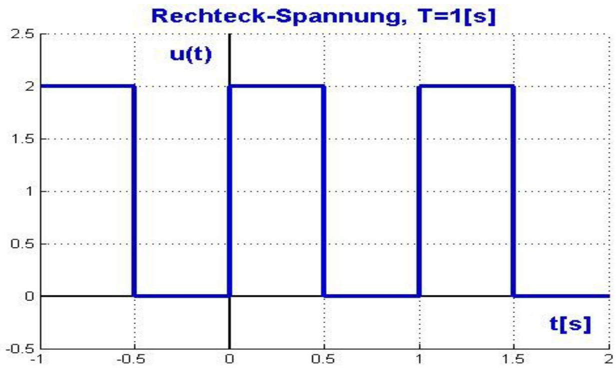
Mathematik II - Übungsblatt 04

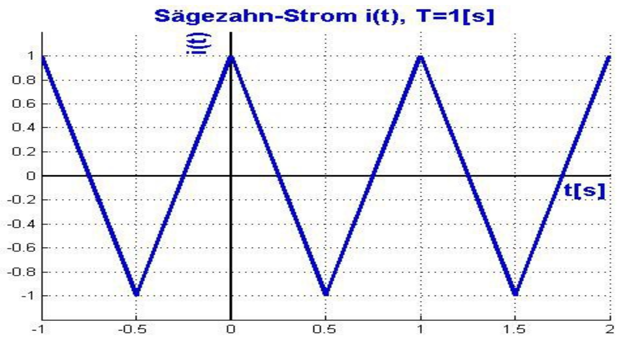
Aufgabe 1

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 der im folgenden Diagramm dargestellte Rechteckspannung:



Hinweis: Suchen Sie zunächst nach Vereinfachungen aufgrund eventuell vorhandener Symmetrien.

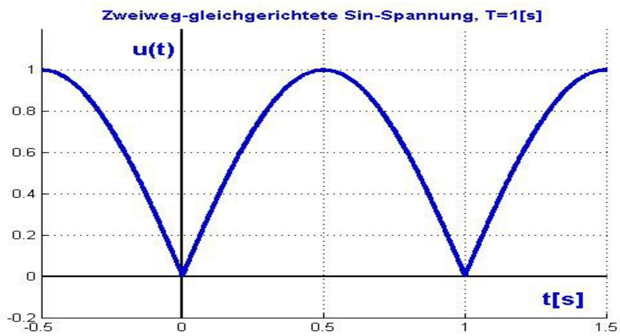
Aufgabe 2



Geben Sie die Fourierkoeffizienten bis zur zweiten Oberschwingung des im Diagramm skizzierten Sägezahn-Stromes i(t) an:

Aufgabe 3

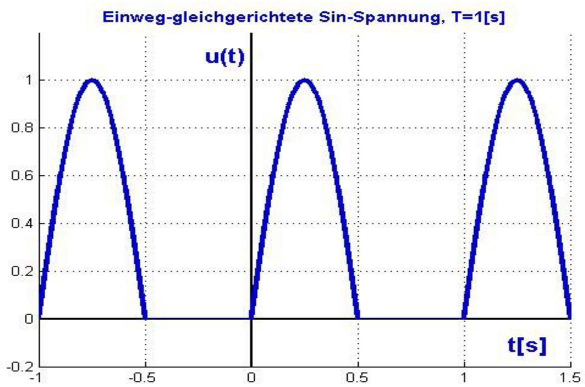
Eine sinusförmige Eingangsspannung an einem Zweiweg-Gleichrichter ergibt folgende Ausgangsspannung u(t):



Bestimmen Sie die Amplituden (= Fourierkoeffizienten) a_1, b_1 der darin enthaltenen ersten Oberschwingungen.

Aufgabe 4

Wie Aufgabe 4, aber Einweg-Gleichrichtung:



Aufgabe 5

Ein Ball wird zum Zeitpunkt t=0 senkrecht nach oben geworfen, die Starthöhe $h(t=0)=h_0$ wird als $h_0=0$ festgelegt, die Startgeschwindigkeit $v_0=v(t=0)$ ist unbekannt. Aus mehreren Messungen der Bahnhöhe h=h(t) soll trotz der dabei unvermeidlichen Messfehler e=e(t) die Gravitationskonstante g möglichst genau bestimmt werden. Die Größen t, h_0, v_0 und g hängen nach den Gesetzen der Mechanik allgemein über die Funktion

$$h(t)=h_0+v_0\cdot t-g\cdot\frac{t^2}{2}$$ zusammen.

Aus welcher Gleichung lässt sich ein möglichst genauer Schätzwert (= Repräsentant) $\hat{g}$ mit

$$|\hat{g}-g|\rightarrow \min.$$

ermitteln, wenn n Messungen von t und h(t) gemacht werden (n>2).

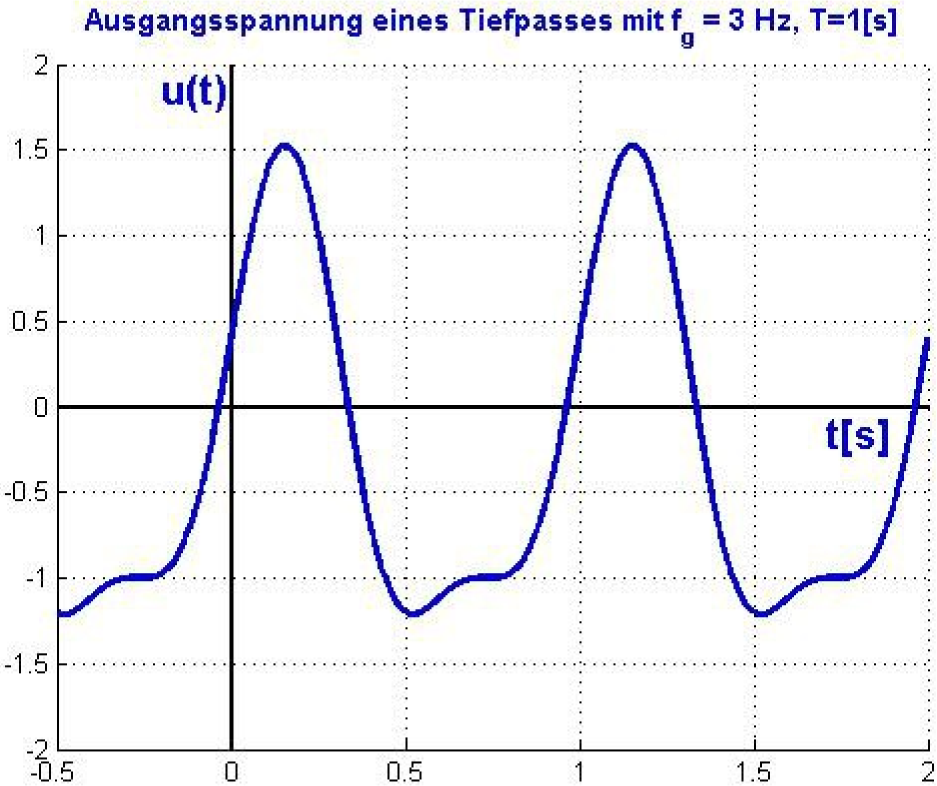
Hinweis: Verwenden Sie die Fehlergleichung $e(t)=h(t)-h_0+v_0\cdot t-g\cdot\frac{t^2}{2}$ und führen Sie eine lineare Regression für v_0, g durch. Sie erhalten hierfür ein lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 6

Beantworten Sie die Fragen von Aufgabe 5 für den Fall, dass auch die Starthöhe h_0 unbekannt ist.

Aufgabe 7

Die mit T = 1s periodische Ausgangsspannung eines Tiefpasses der Grenzfrequenz $f_g = 3\ \text{Hz}$ zeigt auf einem Oszillografen folgenden Verlauf:



Da u(t) wegen der Bandbegrenzung bei der Fourier-Reihendarstellung keine Oberschwingungen über 3 Hz enthalten kann, werden aus dem Oszillogramm im Abstand $\frac{T}{6}$ 6 Werte abgelesen:

u(0) = 0.4 (jeweils in Volt)

u(T/6) = 1.5

u(2T/6) = 0.02

u(3T/6) = -1.2

u(4T/6) = -1.0

u(5T/6) = -0.9

Bestimmen Sie mit dem Verfahren der diskreten Fourier-Transformation (DFT) die Amplituden bis zur zweiten Oberschwingung, also $a_0,\ a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$. Runden Sie die Ergebnisse auf eine Nachkommastelle und berücksichtigen Sie, dass gemäß der Formel im Skript die wahren Amplituden das Doppelte des errechneten Wertes betragen.